Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 5 Septiembre Reserva_1 2014

[2'5 puntos] Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(x) - \text{sen}(x)}{x - \text{sen}(x)}$.

Solución

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \text{sen}(x)}{x - \text{sen}(x)} = \frac{\tan(0) - \text{sen}(0)}{0 - \text{sen}(0)} = \frac{0}{0}.$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital-L'H- (si "f" y "g" son funciones continuas en [a -δ, a + δ], derivables en (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si $x\to\infty$), con lo cual tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \text{sen}(x)}{x - \text{sen}(x)} = (\text{L'H}) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} - \cos(x)}{1 - \cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3(x)}{\cos^2(x) - \cos^3(x)} = \frac{0}{0} = (\text{L'H}) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2(x)\text{sen}(x)}{-2\cos(x)\text{sen}(x) + 3\cos^2(x)\text{sen}(x)} = \{\text{simplifico sen}(x)\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2(x)}{-2\cos(x) + 3\cos^2(x)} = \frac{3\cos^2(0)}{-2\cos(0) + 3\cos^2(0)} = \frac{3}{-2+3} = 3.$$

Ejercicio 2 opción A, modelo 5 Septiembre Reserva_1 2014

Sea f : R $\to$ R la función definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

a) [0'75 puntos] Halla, si existe, el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es y=3-x.

b) [1'75 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta del apartado anterior

Solución

Sea f : R $\to$ R la función definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

a)

Halla, si existe, el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente (R.T.) es y = 3 - x.

Si existe dicho punto, en él la función f(x) y la recta tangente coinciden, es decir f(x) = y.

Resolvemos la ecuación $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 3 - x$, es decir $x^3 - 3x^2 = 0$ $x^2\cdot(x – 3) = 0$, de donde $x^2 = 0$ y $x – 3 = 0$, con lo cual x = 0 y x = 3.

Calculamos la recta tangente en x = 0 y x = 3, para ver cuál es:

De $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, tenemos $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$

R.T. en x = 0 $\to$ y – f(0) = f'(0)(x – 0). Como f(0) = 3 y f'(0) = -1, R.T. y - 3 = -1(x) $\to$ y = 3 - x.

R.T. en x = 3 $\to$ y – f(3) = f'(3)(x – 3). Como f(3) = 0 y f'(3) = 8, R.T. y - 0 = 8(x – 2), de donde y = 8x – 16.

Con lo cual el punto de la gráfica de f(x) donde la R.T. es y = 3 - x, es el punto (0,3).

Otra forma de hacerlo.

La pendiente genérica de la recta tangente a la función f(x) es $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$.

La pendiente de la recta tangente y = 3 − x es y' = – 1.

Igualamos ambas pendiente y vemos si hay solución de dicha ecuación.

De $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1 = y' = -1$, tenemos $3x^2 - 6x = 0 = x(3x - 6) = 0$, de donde x = 0 y x = 2.

R.T. en x = 2 $\to$ y – f(2) = f'(2)(x – 2). Como f(2) = -3 y f'(2) = -1, R.T. y + 3 = -1(x – 2), de donde y = -x + 2 – 3 = -x -1. **Con lo cual el punto de la gráfica de f(x) donde la R.T. es y = 3 - x, y el punto pedido es (0,3).**

b)
Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta del apartado anterior

La grafica de $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$. Es una función polinómica, su dominio es R, y es continua y derivable en R las veces que necesitemos.
Vemos que f(1) = 1 – 3 – 1 + 3 = 0, y hemos visto que f(3) = 0, luego los cortes con los ejes son (0,3), (1,0) y (3,0).
Como $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$, cuando x se acera a $-\infty$, f(x) se acerca a $-\infty$.
Como $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$,cuando x se acera a $+\infty$, f(x) se acerca a $+\infty$.
Los extremos relativos anulan la 1ª derivada.

$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$; $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{6\pm\sqrt{36+12}}{6} = \dfrac{6\pm\sqrt{48}}{6}$, de donde los

posibles extremos son $x = \dfrac{6-\sqrt{48}}{6} \cong -0'15$ y $x = \dfrac{6+\sqrt{48}}{6} \cong 2'15$.

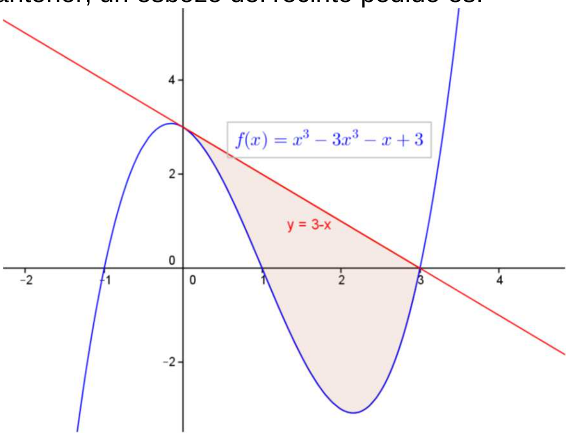
Como f'(-1) = 8 > 0, f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (-∞,-0'15)

Como f'(0) = -1 < 0, f es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (-0'15,2'15)

Como f'(3) = 8 > 0, f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (2'15,∞)

Por definición $x = \dfrac{6-\sqrt{48}}{6}$ es un máximo relativo y $x = \dfrac{6+\sqrt{48}}{6}$ es un mínimo relativo.

Aproximadamente los puntos son (-0'15, 3'08) y (2'15,-3'08).
Para dibujar la recta y = 3 – x con dos puntos es suficiente, y vemos que pasa por (0,3) y (3,0).
Vemos que ambas gráficas coinciden en x = 0 y x = 3, que serán los límites de integación.
Teniendo en cuenta lo anterior, un esbozo del recinto pedido es:



Área $= \int_0^3 ((3-x)-(x^3-3x^2-x+3))dx = \int_0^3 (-x^3+3x^2)dx = \left[\dfrac{-x^4}{4}+\dfrac{3x^3}{3}\right]_0^3 = -81/4+27-0=27/4=$ **6'75 u²**.

Ejercicio 3 opción A, modelo 5 Septiembre Reserva_1 2014

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\lambda y + (\lambda+1)z = \lambda$$
$$\lambda x + z = \lambda$$
$$x + \lambda z = \lambda$$

a) [1'5 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro λ.
b) [0'5 puntos] Resuelve el sistema para λ = 1.
c) [0'5 puntos] Para λ = 0, si es posible, da tres soluciones distintas.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} \lambda y + (\lambda+1)z &= \lambda \\ \lambda x + z &= \lambda \\ x + \lambda z &= \lambda \end{aligned}$$

a)

Discute el sistema según los valores del parámetro λ.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda+1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$.

$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 0 & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda columna $= -(\lambda)\cdot(\lambda^2 - 1)$.

Resolviendo la ecuación $-(\lambda)\cdot(\lambda^2-1) = 0$, obtenemos $\lambda = 0$ y $\lambda^2 - 1 = 0$, de donde $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

Si $\lambda \neq -1$, $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$, $\det(A) = |A| \neq 0$, rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si **$\lambda = -1$**

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda columna $= -(-1)\cdot(1 + 1) = 2 \neq 0$, tenemos rango($A^*$) = 3.

Como rango(A) = 2 $\neq$ rango(A^*) = 3. **El sistema es incompatible y no tiene solución.**

Si **$\lambda = 0$ (Apartado (c))**

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, por tener una columna de ceros, tenemos rango(A^*) = 2.

Como rango(A) = rango(A^*) = 2. **El sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2 con dos ecuaciones es suficiente, tomamos la 2ª y 3ª ecuación, pues con ellas he formado el menor de la matriz A distinto de cero.

z = 0
x = 0
Tomo **y = b** $\in$ R, y las soluciones del sistema son **(x,y,z) = (0, b, 0)** con b $\in$ R.
Como me piden tres soluciones le doy a “b” tres valores distintos tengo tres soluciones distintas. Tomando b = 1, b = 2 y b = 3 las soluciones son **(0, 1, 0), (0, 2, 0) y (0, 3, 0)**

Si λ **= 1 (Apartado (b))**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, por tener una columna de unos, tenemos rango(A*) = 2.

Como rango(A) = rango(A^*) = 2. **El sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2 con dos ecuaciones es suficiente, tomamos la 1ª y 2ª ecuación, pues con ellas he formado el menor de la matriz A distinto de cero.

y + 2z = 1
x + z = 1
Tomo **z = b** $\in$ R, tenemos x = 1 – b e y = 1 – 2b, y las infinitas soluciones del sistema son **(x,y,z) = (1 - b, 1 - 2b, b)** con b $\in$ R.

Ejercicio 4 opción A, modelo 5 Septiembre Reserva_1 2014

Sean A(−3, 4, 0), B(3, 6, 3) y C (−1, 2, 1) los vértices de un triangulo.
a) [1 punto] Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.
b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.
c) [0’5 puntos] Calcula el área del triángulo ABC.

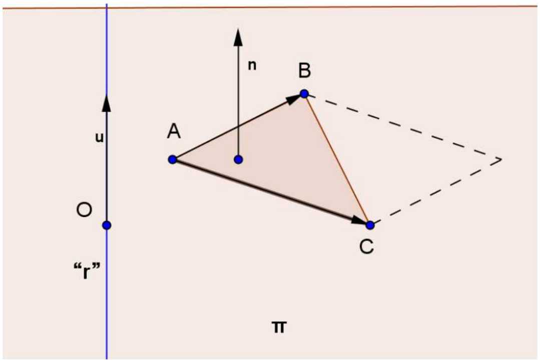
Solución

Sean A(−3, 4, 0), B(3, 6, 3) y C (−1, 2, 1) los vértices de un triangulo.
a)
Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.

Para un plano necesito un punto el A(−3,4,0), y dos vectores independientes, el **AB** = (6,2,3) y el **AC** = (2,-2,1)
La ecuación general del plano pedida es det(**AX,AB,AC**) = 0, siendo X(x,y,z) un punto genérico del plano.

$$\pi \equiv \det(\mathbf{AX},\mathbf{AB},\mathbf{AC}) = 0 = \begin{vmatrix} x+3 & y-4 & z-0 \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (x+3)(2+6) - (y-4)(6-6) + (z)(-12-4) =$$

= 8x + 24 - 16z = 0 = x - 2z + 3 = 0.
Un esbozo de la figura es:



b)
Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.

Para una recta "r" necesitamos un punto, el O(0,0,0), y un vector de dirección, el **u**, nos sirve el vector normal del plano $\pi \equiv x - 2z + 3 = 0$, el **n** = (1,0,-2).
Pongo **la ecuación vectorial de la recta "r" es $(x,y,z) = (0+1\cdot\lambda, 0+0\cdot\lambda, 0-2\cdot\lambda) = (\lambda, 0, -2\cdot\lambda)$,** con $\lambda \in R$, y X(x,y,z) un punto genérico de la recta "r".
c)
Calcula el área del triángulo ABC.

Sabemos que el área de un triángulo es 1/2 del área del paralelogramo que determinan sus vectores **AB** y **AC**, es decir 1/2 módulo (|| ||) del producto vectorial (x) de dichos vectores.

$$\mathbf{AB}\text{x}\mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = \mathbf{i}(2+6) - \mathbf{j}(6-6) + \mathbf{k}(-12-4) = (8,0,-16).$$

Área triángulo = $(1/2)\cdot||\mathbf{AB}\text{x}\mathbf{AC}|| = \mathbf{(1/2)\cdot\sqrt{(8^2 + 16^2)} = (1/2)\cdot\sqrt{(320)}\ u^2 \cong 8'944\ u^2}$.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 5 Septiembre Reserva_1 2014

Considera la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2e^{-x^2}$.
a) [0'75 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .
b) [1'25 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f.

Solución

Considera la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2e^{-x^2} = \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$.

a)
Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

Asíntotas verticales (A.V.) (la recta $x = a$ es A.V. si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$)

Como no hay números que anulen el denominador, recordamos que la exponencial no se anula nunca, f no tiene A.V.
Asíntotas horizontales (A.H.) (la recta $y = b$ es A.H. si $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$)

Como $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2}{e^{x^2}}\right) = \left\{\dfrac{+\infty}{+\infty}, \text{L'Hôpital, L'H}, \lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right\} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x}{2xe^{x^2}}\right) =$

= {simplifico} = $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{e^{x^2}}\right)$ = 1/+∞ = 0, **la recta y = 0 es una A.H en ± ∞.**

Como la función f(x) tiene asíntota horizontal en ± ∞, y no es una función a trozos, **f(x) no tiene asíntotas oblicuas en ± ∞.**

b)

Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Me están pidiendo la monotonía. El estudio de la 1ª derivada

$f(x) = x^2e^{-x^2}$.

$f'(x) = 2x\cdot e^{-x^2} + x^2\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x) = e^{-x^2}\cdot(2x)\cdot(1-x^2)$

De f '(x) = 0, tenemos $(2x)\cdot(1-x^2) = 0$, puesto que la exponencial e^{-x^2} nunca se anula.
Las soluciones de $(2x)\cdot(1-x^2) = 0$, son x = 0, x = 1 y x = - 1, que serán los posibles extremos relativos.

Como f '(-2) = (+)·(-4)·(-3) = (+)·(12) > 0, f(x) es estrictamente creciente (↗) en (- ∞,-1)

Como f '(-0'5) =(+)·(-1)·(0'75) =(+)·(-0'75) < 0, f(x) es estrictamente decreciente (↘) en (-1,0)

Como f '(0'5) =(+)·(1)·(0'75) =(+)·(0'75) > 0, f(x) es estrictamente creciente (↗) en (0,1)

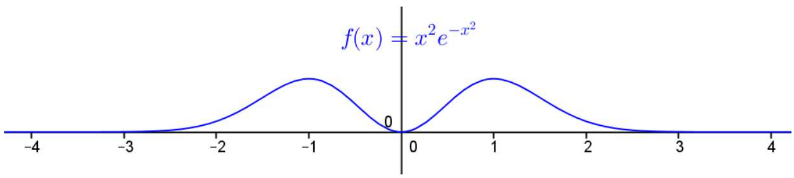
Como f '(2) = (+)·(4)·(-3) = (+)·(-12) < 0, f(x) es estrictamente decreciente (↘) en (1, +∞)

Por definición x = -1 es un máximo relativo que vale $f(-1) = (-1)^2\cdot e^{-1} = 1/e \cong 0'37$.
Por definición x = 0 es un mínimo relativo que vale $f(0) = (0)^2\cdot e^0 = 0$.
Por definición x = 1 es un máximo relativo que vale $f(1) = (1)^2\cdot e^{-1} = 1/e \cong 0'37$.

c)

Esboza la gráfica de f.

Teniendo en cuenta lo anterior y que de para x = 0 f(0) = 0, y de que de f(x) = 0 $x^2 = 0$, puesto que la exponencial no se anula nunca, un esbozo de la gráfica es



Ejercicio 2 opción B, modelo 5 Septiembre Reserva_1 2014

[2'5 puntos] Sea f : (-1,3) → R la función definida por $f(x) = \frac{x+9}{(x+1)(x-3)}$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1, 0).

Solución

Una primitiva de f(x) es $F(x) = \int\frac{x+9}{(x+1)(x-3)}dx$, que es una integral racional con grado del numerador menor que el grado del denominador, luego:

$F(x) = \int\frac{x+9}{(x+1)(x-3)}dx = \int\frac{A}{(x+1)}dx + \int\frac{B}{(x-3)}dx = A\cdot\ln|x+1| + B\cdot\ln|x-3| + k$.

Calculamos A y B de la igualdad $\frac{x+9}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-3)} = \frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)}$

Igualando numeradores → x + 9 = A·(x - 3) + B·(x + 1).
Para x = 3 sustituyendo → 3 + 9 = A·(3 - 3) + B·(3 + 1) → 12 = 4B → **B = 3.**
Para x = -1 sustituyendo → -1 + 9 = A·(-1 - 3) + B·(-1 + 1) → 8 = -4A → **A = -2.**

La primitiva es $F(x) = -2\cdot\ln|x + 1| + 3\cdot\ln|x - 3| + k$, y como pasa por el punto (1,0), tenemos: $F(1) = 0 = -2\cdot\ln|1 + 1| + 3\cdot\ln|1 - 3| + k \rightarrow k = 2\ln(2) - 3\ln(2) = -\ln(2)$, por tanto **la primitiva de f que pasa por (1,0) es $F(x) = -2\cdot\ln|x + 1| + 3\cdot\ln|x - 3| - \ln(2)$.**

Ejercicio 3 opción B, modelo 5 Septiembre Reserva_1 2014

[2'5 puntos] Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Halla la matriz X que verifica $A^{-1}\cdot X\cdot A = B - A$.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Halla la matriz X que verifica $A^{-1}\cdot X\cdot A = B - A$.

La matriz A tienen matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t)$, porque $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix}\text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila}\end{matrix}$ =

$= 1\cdot(-6+5) = -1 \neq 0$.

Multiplicando la expresión $A^{-1}\cdot X\cdot A = B - A$, por la izquierda por la matriz A y por la derecha por la matriz A^{-1}, tenemos $A\cdot A^{-1}\cdot X\cdot A\cdot A^{-1} = A\cdot B\cdot A^{-1} - A\cdot A\cdot A^{-1} \rightarrow I\cdot X\cdot I = A\cdot B\cdot A^{-1} - A\cdot I \rightarrow$
$X = A\cdot B\cdot A^{-1} - A$.

Calculamos $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t)$.

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t) = (1/-1)\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Luego $\mathbf{X = A\cdot B\cdot A^{-1} - A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -1 & 16 & -6 \\ -2 & 40 & -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & 18 & -7 \\ -2 & 45 & -18 \end{pmatrix}$**.**

Ejercicio 4 opción B, modelo 5 Septiembre Reserva_1 2014

Considera el punto A(8, -1, 3) y la recta "r" dada por $\dfrac{x+1}{2} = y - 2 = \dfrac{z-1}{3}$.

a) [1'25 puntos] Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.
b) [1'25 puntos] Halla el punto simétrico de A respecto de r.

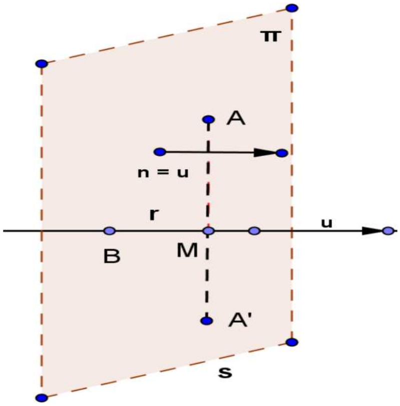
Solución

Considera el punto A(8, -1, 3) y la recta "r" dada por $\dfrac{x+1}{2} = y - 2 = \dfrac{z-1}{3}$.

a)
Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.

De la recta "r" dada por $\frac{x+1}{2} = y - 2 = \frac{z-1}{3}$, tomamos un punto, el B(-1,2,1) y un vector director, el **u** = (2,1,3).

Preparamos una figura para los dos apartados:



El plano que pasa por el punto A(8,-1,3) y es perpendicular a la recta "r", tiene por vector normal **n**, el vector director de la recta, el **u** = **n** = (2,1,3).
El plano π tiene de ecuación **AX•n** = 0, donde X(x.y.z) es un punto genérico del plano y • es el producto escalar de dos vectores:
π ≡ AX•n = 0 = (x - 8,y + 1,z - 3) •(2,1,3) = 2x - 16 + y + 1 + 3z - 9 = **2x + y + 3z - 24 = 0.**
b)
Halla el punto simétrico de A respecto de r.

Ponemos la recta "r" en paramétricas, tomando como punto el B(-1,2,1) y como vector de dirección el **u** = (2,1,3), con lo cual "r"≡ $\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$ con $\lambda \in$ R.

Calculamos el punto de corte M del plano "π" con la recta "r", sustituyendo la recta en el plano:
2(-1+2λ) + (2+λ) + 3(1+3λ) - 24 = 0 → -21+14λ = 0 → λ = 21/14 = 3/2.
El punto M es M(-1+2(3/2), 2+(3/2), 1+3(3/2)) = M(2,7/2,11/2).

El punto A'(x,y,z) se calcula sabiendo que el punto M es el punto medio del segmento AA'.
(2,7/2,11/2) = ((x+8)/2,(y-1)/2,(z+3)/2), de donde:
2 = (x+8)/2 → x = -4.
7/2 = (y-1)/2 → y = 8.
11/2 = (z+3)/2 → z = 8.
El simétrico A' de A respecto a la recta "r" es A'(-4,8,8).